標数2のKummer曲面について (代数幾何とその近傍)

数理解析研究所講究録
273巻 1976年 1-8

標数2のKummer曲面について

東北大理　　桂　利行

Aを標数pの代数的閉体k上のAbel曲面(i.e. 2次元Abel多様体)とする。Aのinversionをι ($\iota(u)=-u$)とし，商多様体A/ιを考える。標数$p\neq 2$ならば，A/ιのminimal non-singular modelがK3曲面(標準因子が自明的なregular曲面)になることはよく知られている。

標数$p=2$の時には，群$G=\{id_A, \iota\}\cong \mathbb{Z}/2$の作用は"wild action"となって少し変った現象が起こる。T. ShiodaはAが2つの楕円曲線の直積の場合にこの現象を解析し，次の結果を得た(cf. T. Shioda[6])。

(i) Aが2つのsupersingularな楕円曲線の直積に同型ならば，A/ιは有理曲面である。

(ii) それ以外の場合には，A/ιのminimal non-singular modelはK3曲面である。

さらに，次のような問題を提起した。

(i)　A が位数 2 の点を持たない時，A/ι は有理曲面であるか？

(ii)　A が位数 2 の点を持つ時，A/ι の minimal non-singular model は K3 曲面であるか？

本稿では　これらの問に対する肯定的解答を与え，さらに A/ι の特異点の性質を調べる。詳細は後に発表するので，ここでは証明を省略し，結果とそれに用いられた用語の説明をするにとどめる。

本稿を準備するにあたり、これらの問題を著者に与え，また，適切な助言をして下さった Professor T. Shioda に感謝します。また，助言と激励を惜まなかった Professor K. Ueno に感謝します。

§1. 特異点について．

S を　孤立特異点 v を持つ曲面とする．morphism φ: $\tilde{S} \longrightarrow S$ で，$\tilde{S}$ が non-singular, f が proper birational なるものを　S の desingularization という。v の逆像 $\varphi^{-1}(v)$ の support である reduced curve を X と書き，$\{X_i\}$, $i=1,\cdots,n$ を X の irreducible components とする。点 v に於ける局所環を $\mathcal{O}_v$ とかく。$\mathcal{O}_v$ の arithmetic genus を

$$p_a(\mathcal{O}_v) = \sup p_a(Z)$$

と定義する。ただし，右辺に於て，Z は support が X に含まれる positive divisor 全体を動くものとし，$p_a(Z)$ は Z の arithmetic genus を表わすものとする。

定義（M. Artin [1], P. Wagreich [7]）. $p_a(\mathcal{O}_v)=0$ であるとき v を rational singular point という。$p_a(\mathcal{O}_v)=1$ であるとき v を elliptic singular point という。

Z_0 を M. Artin [1] の意味の fundamental cycle (i.e. $(Z\cdot X_i)\leqq 0 \quad i=1,\cdots n$ をみたす positive divisor のうち最小のもの）とすると

(i) $p_a(\mathcal{O}_v)=0 \iff p_a(Z_0)=0 \iff R^1\varphi_*(\mathcal{O}_{\tilde{S}})=0$,

(ii) $p_a(\mathcal{O}_v)=1 \iff p_a(Z_0)=1$

が成立する。

§2．結果

定理1．次の3条件は同値である。

(i) A は supersingular な Abel 曲面である。

(ii) A/ι は有理曲面である。

(iii) A/ι の特異点は elliptic singular point である。

定理2．次の3条件は同値である。

(i) A は non-supersingular な Abel 曲面である。

(ii) A/ι の minimal non-singular model が K3 曲面であ

る。

(iii) A/ι の特異点が rational singular point である。

A の 2 等分点のなす群を ${}_2A_{red}$ とかく。

定理 3. A/ι の特異点は次のように分類される。

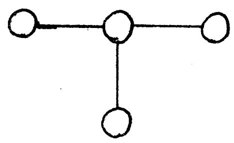
(i) ${}_2A_{red} \cong \overset{2}{\oplus} \mathbb{Z}/2$ ならば rational double point of type D_4.

(ii) ${}_2A_{red} \cong \mathbb{Z}/2$ ならば rational double point of type D_8.

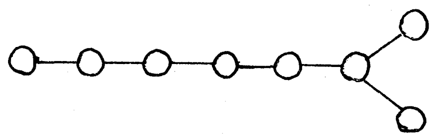
(iii) A が supersingular な Abel 曲面で 2 つの楕円曲線の直積に同型ならば, elliptic double point of type ⑲$_c$ (cf. P. Wagreich [7])。

(iv) A が supersingular な Abel 曲面で 2 つの楕円曲線の直積には決して同型にならないならば, elliptic double point of type ④$^1_{01}$ (cf. P. Wagreich [7])。

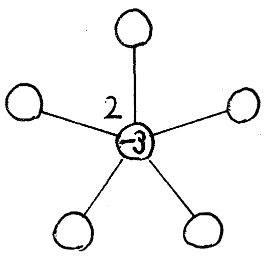
各々の type の configuration は次のとおりである。

(i) 

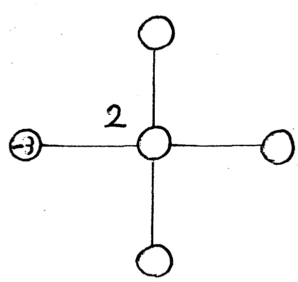
D_4

(ii) 

D_8

(iii) 

⑲$_c$

(iv) 

④$^1_{01}$

ただし，○は非特異有理曲線を表わし，㊀③はその self-intersection number が -3 であることを表わす。何も書いていない所は self-intersection number が -2 である。直線で結ばれた2個の○は，transversal に交わっている。○の左肩の数字は multiplicity を表わす。何も書いていない所は multiplicity 1 である。

最後に ある3種の elliptic surface の構造を問題にする。Local-local な group scheme

$$\alpha_2 = \mathrm{Spec}\ k[T]/(T^2),$$

$$\text{multiplication } m : \alpha_2 \times \alpha_2 \longrightarrow \alpha_2$$

$$m^*(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$$

を考える。 $\mathrm{Hom}(\alpha_2, \alpha_2) \cong k$ だから，$\mathrm{Hom}(\alpha_2, A)$ は自然に k 上の vectorspace とみなせる。そこで，

$$a(A) = \dim_k \mathrm{Hom}(\alpha_2, A)$$

と定義する。

$\mathrm{char.}\, k = 2$ の場合には supersingular な楕円曲線は $E:\ y^2 + y = x^3$ ただ1つであるから，F. Oort [5] をつかって，A を supersingular な Abel 曲面とすると，

(i) $a(A) = 2 \iff {}^{\exists}\varphi : A \cong E \times E$,

(ii) $a(A) = 1 \iff A$ は楕円曲線の直積に分解しない，

が成立する。(ii)の場合にも α_2 の $E \times E$ への適当な埋込みを

とって

$$^{\exists}\varphi : A \cong E \times E/\alpha_2$$

が成立する。

(i)の場合には $p_1 : E \times E \longrightarrow E$ なる第一成分への射影から自然に

$$\begin{array}{cccc} \pi : & E \times E/\iota & \longrightarrow & E/\iota \\ & \wr\| & & \wr\| \\ & A/\iota & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

なる elliptic fiber space の構造をうる。

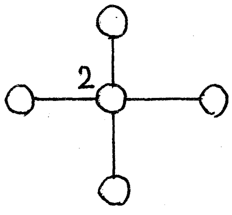
(ii)の場合には $p_1 : E \times E/\alpha_2 \longrightarrow E/\alpha_2$ なる第1成分への射影から自然に

$$\pi : A/\iota \longrightarrow E/\iota \cong \mathbb{P}^1$$

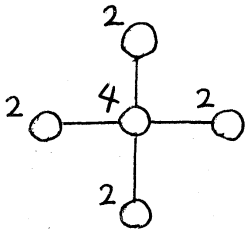
なる elliptic fiber space の構造をうる。

A/ι は ただ1つの特異点を持っているが，(i)(ii)いずれの場合にもそれを解消して，第1種例外曲線を含まぬ$\mathbb{P}^1$上の elliptic surface をつくることができる。それを $Km_\varphi(A)$とかく。この曲面の singular fiber は φのとり方によらず ただ1つで，(i)の場合には type I_0^*，(ii)の場合には $2I_0^*$ (i.e. type I_0^* の multiple fiber)である(cf. K. Kodaira [3])。

(i)



(ii)



A が non-supersingular な Abel 曲面の時には, A/ι から minimal resolution によって得られる曲面を $Km(A)$ とかくことにすれば 次の定理を得る。

定理4。(i) A が supersingular ならば, Picard number $\rho(Km_{\varphi}(A)) = 10$。

(ii) A が non-supersingular ならば, Picard number $\rho(Km(A)) = \rho(A) + 16$。

文献

[1] M. Artin, On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math. Vol. 166, 76 − 102 (1966).

[2] T. Katsura, On Kummer Surfaces in Characteristic 2, in preparation.

[3] K. Kodaira, On compact analytic surfaces. II, Ann. of Math., 77, 563 − 626 (1963).

[4] T. Ohashi, 標数2のクンマー曲面について。修論, University of Tokyo, 1974.

[5] F. Oort, Which abelian varieties are products of elliptic curves? to appear.

[6] T. Shioda, Kummer surfaces in characteristic 2. Proc. J. Acad. Vol. 50, No. 9 (1974).

[7] P. Wagreich, Elliptic singularities of surfaces. Amer. J. Math. 92, 419 - 454 (1970).